Mathematische Abhandlung

über

die stereographische Projection des Ellipsoids.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

in der

Philosophie,

mit Zustimmung der Hohen Philosophischen Facultät

der Universität Göttingen

geschrieben

von

A. Schulte.

Bonn,

Druck von Carl Georgi.

1874.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544702_0061

Aufgabe.

Die beiden Haupteigenschaften der stereographischen Projection der Kugelfläche sind unter Voraussetzung einer gewissen Projectionsebene und eines gewissen Orts des Auges bekanntlich die folgenden:

1) Die stereographischen Projectionen aller ebenen Schnitte sind Kreise.
2) Jede zwei Kreise auf der Kugelfläche schneiden sich unter denselben Winkeln, wie ihre stereographischen Projectionen auf der Projectionsebene.

Es soll im Folgenden auf analytisch-geometrischem Wege untersucht werden, ob und unter welchen Bedingungen die vorgenannten Eigenschaften auch für das Ellipsoid gelten.

Erster Theil.

Untersuchung, unter welchen Bedingungen die stereographischen Projectionen aller ebenen Schnitte eines Ellipsoids Kreise sind.

Die Gleichung des Ellipsoids, bezogen auf ein mit seinen Hauptaxen a, b und c zusammenfallendes Coordinatensystem der ξ, η und ζ, heisst bekanntlich:

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{c}\right)^2 = 1$$

Um die Gleichung dieses Ellipsoids in Bezug auf ein anderes rechtwinkliges Coordinatensystem der x, y, z mit dem-

selben Anfang zu erhalten, haben wir nach den Lehren der Coordinatenverwandlung ξ, η, ζ resp. zu ersetzen durch

$$\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z,$$
$$\beta x + \beta' y + \beta'' z,$$
$$\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z,$$

wobei

$$\cos(xa) = \alpha, \quad \cos(xb) = \beta, \quad \cos(xc) = \gamma,$$
$$\cos(ya) = \alpha', \quad \cos(yb) = \beta', \quad \cos(yc) = \gamma',$$
$$\cos(za) = \alpha'', \quad \cos(zb) = \beta'', \quad \cos(zc) = \gamma'',$$

gesetzt ist. Die auf das letztere Coordinatensystem bezogene Ellipsoidgleichung ist hiernach:

$$\left(\frac{\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z}{a}\right)^2 +$$
$$\left(\frac{\beta x + \beta' y + \beta'' z}{b}\right)^2 +$$
$$\left(\frac{\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z}{c}\right)^2 = 1$$

oder

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right) x^2 +$$
$$\left(\frac{\alpha'^2}{a^2} + \frac{\beta'^2}{b^2} + \frac{\gamma'^2}{c^2}\right) y^2 +$$
(1) $$\left(\frac{\alpha''^2}{a^2} + \frac{\beta''^2}{b^2} + \frac{\gamma''^2}{c^2}\right) z^2 +$$
$$2\left(\frac{\alpha'\alpha''}{a^2} + \frac{\beta'\beta''}{b^2} + \frac{\gamma'\gamma''}{c^2}\right) yz +$$
$$2\left(\frac{\alpha''\alpha}{a^2} + \frac{\beta''\beta}{b^2} + \frac{\gamma''\gamma}{c^2}\right) zx +$$
$$2\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2} + \frac{\beta\beta'}{b^2} + \frac{\gamma\gamma'}{c^2}\right) xy = 1,$$

wofür zur Abkürzung geschrieben werde:

(1a) $$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz +$$
$$2Ezx + 2Fxy = 1.$$

Eine durch dieses Ellipsoid gelegte Ebene habe die Gleichung:

(2) $$\lambda x + \mu y + \nu z = d,$$

wo λ, μ, ν die Cosinus der Stellungswinkel dieser Ebene und d ihre Entfernung vom Coordinatenanfang bedeuten.

Um nun die stereographische Projection des durch diese Ebene auf dem Ellipsoid gebildeten Schnittes zu erhalten, ist die Curve zu berechnen, welche derjenige Kegel in der Projectionsebene ausschneidet, dessen Centrum der Ort des Auges und dessen Directrix der genannte ebene Schnitt ist. Da aber diese Projectionsfiguren für alle parallelen Projectionsebenen ähnlich sind und es hierauf bei unserer Untersuchung blos ankommt, so darf ich der Kürze der Rechnung halber eine der Coordinatenebenen des oben gewählten secundären Systems selbst, etwa die xy-Ebene, zur Projectionsebene wählen, indem ja deren Richtung in Bezug auf das Ellipsoid ganz beliebig sein kann. Bezogen auf diese berechnet sich nun die erwähnte Projection folgendermassen:

Die Gleichungen der Geraden, die durch das Auge (l, m, n) und einen beliebigen zweiten Punkt (ξ, η, ζ) gelegt ist, sind

$$\frac{x-l}{\xi-l} = \frac{y-m}{\eta-m} = \frac{z-n}{\zeta-n}$$

oder

(3) $$y = \frac{\eta-m}{\xi-l}x + \frac{\xi m-\eta l}{\xi-l} = Px + p,$$
$$z = \frac{\zeta-n}{\xi-l}x + \frac{\xi n-\zeta l}{\xi-l} = Qx + q,$$

wo P und p, Q und q zur Abkürzung dienen. Soll diese Linie durch einen Punkt (x, y, z) des oben besprochenen Schnittes gehen, so müssen seine Coordinaten ihren Gleichungen genügen. Aus den Gleichungen (1^a), (2) und (3) werden wir mithin x, y und z zu eliminiren und darauf $\zeta = o$ zu setzen haben, um die verlangte Projection zu erhalten. Als Folge von (2) und (3) ist

$$\lambda x + \mu Px + \nu Qx = d - \mu p - \nu q$$

oder

$$x = \frac{d - \mu p - \nu q}{\lambda + \mu P + \nu Q}$$
$$= \frac{d(\xi - l) - \mu(\xi m - \eta l) - \nu(\xi n - \zeta l)}{\lambda(\xi - l) + \mu(\eta - m) + \nu(\zeta - n)},$$

und durch einfache Buchstabenvertauschung ergibt sich hieraus

$$y = \frac{d(\eta - m) - \nu(\eta n - \zeta m) - \lambda(\eta l - \xi m)}{\lambda(\xi - l) + \mu(\eta - m) + \nu(\zeta - n)},$$
$$z = \frac{d(\zeta - n) - \lambda(\zeta l - \xi n) - \mu(\zeta m - \eta n)}{\lambda(\xi - l) + \mu(\eta - m) + \nu(\zeta - n)}.$$

Setzen wir hierin $\zeta = o$ und multipliciren alle Zähler und Nenner mit -1, so gelangen wir zu den Ausdrücken:

$$x = \frac{ld + (m\mu + n\nu - d)\zeta - l\mu\eta}{l\lambda + m\mu + n\nu - \lambda\xi - \mu\eta},$$
$$y = \frac{md - m\lambda\xi + (l\lambda + n\nu - d)\eta}{l\lambda + m\mu + n\nu - \lambda\xi - \mu\eta},$$
$$z = \frac{nd - n\lambda\xi - n\mu\eta}{l\lambda + m\mu + n\nu - \lambda\xi - \mu\eta},$$

wofür zur Bequemlichkeit der Rechnung geschrieben werde:

$$x = \frac{P + Q\xi + R\eta}{W - \lambda\xi - \mu\eta},$$
$$y = \frac{P' + Q'\xi + R'\eta}{W - \lambda\xi - \mu\eta},$$
$$z = \frac{P'' + Q''\xi + R''\eta}{W - \lambda\xi - \mu\eta}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in (1[a]) findet man die Gleichung der in Rede stehenden Projection, die nach Multiplication mit $(W - \lambda\xi - \mu\eta)^2$ lautet:

$$\begin{aligned}
&A(P + Q\xi + R\eta)^2 + \\
&B(P' + Q'\xi + R'\eta)^2 + \\
&C(P'' + Q''\xi + R''\eta)^2 + \\
&2D(P' + Q'\xi + R'\eta)(P'' + Q''\xi + R''\eta) + \\
&2E(P'' + Q''\xi + R''\eta)(P + Q\xi + R\eta) + \\
&2F(P + Q\xi + R\eta)(P' + Q'\xi + R'\eta) \\
&\quad = (W - \lambda\xi - \mu\eta)^2,
\end{aligned}$$

oder wenn wir nach ξ und η ordnen,

$$
\begin{aligned}
&\{AQ^2 + BQ'^2 + CQ''^2 + 2DQ'Q'' + \\
&\qquad 2EQ''Q + 2FQQ' - \lambda^2\}\xi^2 + \\
&\{AR^2 + BR'^2 + CR''^2 + 2DR'R'' + \\
&\qquad 2ER''R + 2FRR' - \mu^2\}\eta^2 + \\
&2\{AQR + BQ'R' + CQ''R'' + D(Q''R' + Q'R'') + \\
&\quad E(QR'' + Q'R) + F(Q'R + QR') - \lambda\mu\}\xi\eta + \\
&2\{APQ + BP'Q' + CP''Q'' + D(P''Q' + P'Q'') + \\
&\quad E(PQ'' + P''Q) + F(P'Q + PQ') - W\lambda\}\xi + \\
&2\{APR + BP'R' + CP''R'' + D(P''R' + P'R'') + \\
&\quad E(PR'' + P''R) + F(P'R + PR') - W\mu\}\eta + \\
&\{AP^2 + BP'^2 + CP''^2 + 2DP'P'' + \\
&\qquad 2EP''P + 2FPP' - W^2\} = 0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Damit dieselbe einen Kreis darstelle, sind nothwendige und hinreichende Bedingungen, dass der Coëfficient von $\xi\eta$ verschwinde und die von ξ^2 und η^2 einander gleich seien. Nach Einführung der unter P, Q, u. s. w. verstandenen Ausdrücke, besagt die erste dieser Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
&-A(m\mu + n\nu - d)l\mu \\
&-B(l\lambda + n\nu - d)m\lambda + Cn^2\lambda\mu \\
&-D(l\lambda + n\nu - d)n\lambda + Dmn\lambda\mu \\
&-E(m\mu + n\nu - d)n\mu + Eln\lambda\mu \\
&+F(l\lambda + n\nu - d)(m\mu + n\nu - d) \\
&+Flm\lambda\mu - \lambda\mu = 0,
\end{aligned}
$$

die bei anderer Anordnung in folgender Gestalt erscheint:

$$
\begin{aligned}
&-(Blm + Dln)\lambda^2 \\
&-(Alm + Emn)\mu^2 \\
&+(Cn^2 + Dmn + Eln + 2Flm - 1)\lambda\mu \\
&-(Bmn + Dn^2 - Fln)\lambda\nu \\
&-(Aln + En^2 - Fmn)\mu\nu \\
&+(Bm + Dn - Fl)\lambda d \\
&+(Al + En - Fm)\mu d \\
&+F(n\nu - d)^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Die zweite der genannten Bedingungen ergibt

$$\begin{aligned} &A(m\mu + n\nu - d)^2 + Bm^2\lambda^2 + Cn^2\lambda^2 \\ &+ 2Dmn\lambda^2 - 2E(m\mu + n\nu - d)n\lambda \\ &- 2F(m\nu + n\nu - d)m\lambda - \lambda = \\ &Al^2\mu^2 + B(l\lambda + n\nu - d)^2 + Cn^2\mu^2 \\ &- 2D(l\lambda + n\nu - d)n\mu + 2Eln\mu^2 \\ &- 2F(l\lambda + n\nu - d)l\mu - \mu^2, \end{aligned}$$

oder in derselben Weise, wie Gleichung (5), geordnet,

$$\begin{aligned} &(Bm^2 - Bl^2 + Cn^2 + 2Dmn - 1)\lambda^2 \\ &- (Al^2 - Am^2 + Cn^2 + 2Eln - 1)\mu^2 \\ &+ 2(Dln - Emn + Fl^2 + Fm^2)\lambda\mu \\ &- 2(Bln + En^2 + Fmn)\lambda\nu \\ &+ 2(Amn + Dn^2 + Fln)\mu\nu \\ &+ 2(Bl + En + Fm)\lambda d \\ &- 2(Am + Dn + Fl)\mu d \\ &+ (A - B)\,(n\nu - d)^2 = o. \end{aligned} \tag{6}$$

Sollen nun die Gleichungen (5) und (6) erfüllt sein bei beliebiger Lage der schneidenden Ebene, d. h. bei willkürlicher Wahl der Grössen λ, μ, ν und d, wenn dabei nur die bekannte Relation

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

berücksichtigt wird, so zerlegen sich dieselben auf folgende Weise in mehrere andere: Ich untersuche ihre Form für alle Schnitte, die der xy-, der xz- und der yz-Ebene parallel sind, für welche sie ja auch gelten müssen, d. h. ich setze in ihnen nach einander

$$\begin{aligned} \lambda = \mu = o \quad &\text{und} \quad \nu = \pm 1, \\ \lambda = \nu = o \quad &\text{und} \quad \mu = \pm 1, \\ \mu = \nu = o \quad &\text{und} \quad \lambda = \pm 1; \end{aligned}$$

dann folgt zunächst in Gleichung (5) resp. aus der letzten, vorletzten und drittletzten Reihe, weil jedesmal d willkürlich bleibt,

$$\begin{aligned} F &= o, \\ Al + En &= o, \\ Bm + Dn &= o. \end{aligned}$$

Das Verschwinden aller Glieder mit Ausnahme des dritten ist unmittelbare Folge dieser 3 Bedingungsgleichungen, welche beliebige andere Werthe hierauf λ, μ und ν immer annehmen mögen; daher muss nothwendig auch das dritte gleich o sein, d. h.

$$Cn^2 + Dmn + Eln - 1 = 0.$$

Die Gleichung (6) fordert für den Fall

$$\lambda = \mu = o \quad \text{und} \quad \nu = \pm 1$$

die weitere Beziehung

$$A = B.$$

Mehr Bedingungsgleichungen existiren nicht, weil mit dem Bestehen der gefundenen auch (6) stets erfüllt ist. Bei den letzten 5 Gliedern erkennt man leicht, dass sie beständig verschwinden, die Coefficienten der ersten 3 Glieder aber sind der Reihe nach gleichbedeutend mit

$m(Bm + Dn) - l(Bl + En) + (Cn^2 + Dmn + Eln - 1)$,

$l(Al + En) - m(Am + Dn) + (Cn^2 + Dmn + Eln - 1)$,

$2\{l(Bm + Dn) - m(Bl + En) + Fl^2 + Fm^2\}$,

daher werden auch sie sich stets annulliren. Wir haben also nur folgende nothwendige und hinreichende Bedingungen für die Richtigkeit der Gleichungen (5) und (6) bei beliebiger Lage der Ebene (2):

I. $A = B$,

II. $F = O$,

III. $Am + Dn = o$,

IV. $Al + Dn = o$,

V. $Cn^2 + Dmn + Eln = 1$.

Da die ersten beiden unabhängig von den Coordinaten des Auges sind, so kann durch sie nur die Gestalt des Ellipsoids oder seine Lage gegen die Projectionsebene bestimmt werden, während sich aus den 3 letzten der Ort des Auges ergeben wird.

Sehen wir zunächst unter welchen Umständen diese Bedingungen für die Kugel, als speciellen Fall eines Ellipsoids, befriedigt sind, so finden wir, dass für sie I und II

in der That richtig sind, während zum Erfülltsein von III und IV, weil hier $D = E = o$ ist.

$$m = o \quad \text{und} \quad l = o,$$

und von V

$$n = \pm \varrho$$

sein muss, wo ϱ den Kugelradius bedeutet. Es gilt daher der Satz:

»Die stereographischen Projectionen aller ebenen Kugelschnitte sind Kreise, wenn das Auge in einem der Endpunkte des auf der Projectionsebene senkrechten Durchmessers sich befindet, aber in keinem andern Falle.«

Um nun die Untersuchung für ein Ellipsoid durchzuführen, betrachten wir längere Zeit nur die Bedingungen I und II, die die Form annehmen:

$$I^a \qquad \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = \frac{\alpha'^2}{a^2} + \frac{\beta'^2}{b^2} + \frac{\gamma'^2}{c^2}$$

und

$$II^a \qquad \frac{\alpha\alpha'}{a^2} + \frac{\beta\beta'}{b^2} + \frac{\gamma\gamma'^2}{c^2} = o.$$

Es fragt sich, ob dieselben bei der bekannten Abhängigkeit der Cosinus $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ von einander existiren können, wenn mindestens 2 der Axen a, b und c verschiedene Grösse haben. Ich nehme zunächst an, dass keiner der erwähnten 6 Cosinus gleich o sei und eliminire aus den obigen Gleichungen eine der Ellipsoidaxen, etwa c. Es ist

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2\gamma\gamma'} + \frac{\beta\beta'}{b^2\gamma\gamma'} = -\frac{1}{c^2},$$

mithin

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \gamma^2\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2\gamma\gamma'} + \frac{\beta\beta'}{b^2\gamma\gamma'}\right) = \frac{\alpha'^2}{a^2} + \frac{\beta'^2}{b^2} - \gamma'^2\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2\gamma\gamma'} + \frac{\beta\beta'}{b^2\gamma\gamma'}\right)$$

oder nach Multiplication mit $\gamma\gamma' a^2 b^2$

$$\{\gamma\gamma'(\alpha^2 - \alpha'^2) + \alpha\alpha'(\gamma'^2 - \gamma^2)\}b^2 +$$
$$\{\gamma\gamma'(\beta^2 - \beta'^2) + \beta\beta'(\gamma'^2 - \gamma^2)\}a^2 = o.$$

Vorstehende Coëfficienten von b^2 und a^2 sind einander gleich und entgegengesetzt, denn es ist

$$\begin{aligned}\beta^2 - \beta'^2 &= (1 - \alpha^2 - \gamma^2) - (1 - \alpha'^2 - \gamma'^2)\\ &= (\alpha'^2 - \alpha^2) + (\gamma'^2 - \gamma^2),\\ \beta\beta' &= -(\alpha\alpha' + \gamma\gamma'),\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}&\gamma\gamma'(\beta^2 - \beta'^2) + \beta\beta'(\gamma'^2 - \gamma^2)\\ &= \gamma\gamma'\{(\alpha'^2 - \alpha^2) + (\gamma'^2 - \gamma^2)\} - (\alpha\alpha' + \gamma\gamma')(\gamma'^2 - \gamma^2)\\ &= -\gamma\gamma'(\alpha^2 - \alpha'^2) - \alpha\alpha'(\gamma'^2 - \gamma^2).\end{aligned}$$

Daher ist erforderlich, dass $a^2 = b^2$, oder absolut genommen

$$a = b$$

sei. Jetzt geht aus II^a und der bekannten Gleichung

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = o$$

hervor, dass

$$\frac{a^2}{c^2}\gamma\gamma' = \gamma\gamma',$$

also auch

$$a = c$$

ist. Wir sehen, dass unsere beiden Bedingungen unter der vorhin gemachten Annahme nur existiren können, wenn $a = b = c$ ist, d. h. für eine Kugel. Zur Möglichkeit ihrer Existenz auch für ein Ellipsoid ist deshalb nothwendig, dass mindestens einer der oben genannten 6 Cosinus gleich o sei. Hierzu sei γ gewählt, während α, β, α', β' und γ' noch von o verschieden sein sollen. Dann ergibt sich aus den nunmehrigen Gleichungen

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2} + \frac{\beta\beta'}{b^2} = o$$

$$\text{und} \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' = o,$$

dass

$$a = b,$$

und darauf aus

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = \frac{\alpha'^2}{a^2} + \frac{\beta'^2}{b^2} + \frac{\gamma'^2}{c^2}$$

mit Hülfe der Relationen

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \text{ und } \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1,$$

dass auch

$$a = c$$

sein muss. Wir erhalten also auch hier eine Kugel, wenn wir nicht annehmen, dass noch ein zweiter dieser Cosinus gleich o ist. Dann ist aber jedenfalls auch einer der Cosinus α'', β'', γ'' gleich o, wie man sich leicht durch den zwischen den 9 Grössen α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' bestehenden Zusammenhang überzeugt. Die Bedeutung von α'', β'', γ'' nach Seite 4 zeigt, dass in diesem Falle eine der Ellipsoidaxen in der xy-Ebene liegt, und es ist also der Schluss gerechtfertigt:

»Die betrachtete Eigenschaft gilt fürs Ellipsoid nicht, so lange nicht eine seiner Axen in die angenommene Projectionsebene fällt.«

Indem wir dies nun voraussetzen und die Axe a in die xy-Ebene verlegen, so dass

$$\alpha'' = o$$

wird, ist es zugleich ohne Beeinträchtigung des gesuchten Resultates erlaubt, dieselbe mit der x-Axe coincidiren zu lassen, da es offenbar gleichgültig ist, welche Richtung sie in der Projectionsebene habe. Dann fällt die bc-Ebene mit der yz-Ebene zusammen, mithin sind die Winkel, die b und c mit der y-Axe bilden, dieselben mit denen, welche ihre Neigung gegen die xy-Ebene bestimmen, so dass durch β' und γ' auch die Lage dieser Axen in Bezug auf die Projectionsebene gegeben ist. Aus den gemachten Voraussetzungen folgt:

$$\alpha'' = \alpha' = \beta = \gamma = o, \qquad \alpha = \pm 1,$$
$$\beta'^2 + \gamma'^2 = \beta''^2 + \gamma''^2 = 1,$$
$$\beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = o,$$

und aus den letztern Gleichungen durch Berechnung:

$$\beta'' = \pm\gamma', \qquad \gamma'' = \pm\beta'.$$

Wenn 2 der Grössen β'', γ', γ'', β' (die wir an dieser Stelle als absolut betrachten, während sie erst mit ihren Vorzeichen die unter ihnen verstandenen Cosinus bezeichnen) dasselbe Vorzeichen haben, so müssen die andern beiden mit verschiedenen Vorzeichen genommen werden, so dass man zwischen denselben 8 Fälle unterscheiden kann:

1) $\beta' = \gamma''$	5) $-\beta' = \gamma''$
$\beta'' = -\gamma'$,	$\beta'' = \gamma'$,
2) $\beta' = -\gamma''$	6) $-\beta' = -\gamma''$
$\beta'' = \gamma'$,	$\beta'' = -\gamma'$,
3) $-\beta' = \gamma''$	7) $\beta' = \gamma''$
$-\beta'' = -\gamma'$,	$-\beta'' = \gamma'$,
4) $-\beta' = -\gamma''$	8) $\beta' = -\gamma''$
$-\beta'' = \gamma'$,	$-\beta'' = -\gamma'$.

Werden die in der yz-Ebene durch (y, z), (z, —y), (—y, —z) und (—z, y) gebildeten Quadranten der Reihe nach der erste, zweite, dritte und vierte genannt, so zeigen die ersten 4 der vorigen Gleichungspaare an, dass die Axe b durch den ersten und dritten Quadranten geht, während die letzten 4 ihr eine entsprechende Richtung im zweiten und vierten Quadranten geben.

Die Bedingungsgleichung II^a ist jetzt von selbst erfüllt, und es bleibt I^a als einzige Bedingung, die übergeht in

$$I^b \qquad \frac{1}{a^2} = \frac{\beta'^2}{b^2} + \frac{\gamma'^2}{c^2},$$

wobei noch

$$\beta'^2 + \gamma'^2 = 1$$

zu berücksichtigen ist. Ellipsoide, die dieser Forderung genügen, existiren in Wirklichkeit, und zwar sowohl solche mit 3 verschiedenen Axen, als auch solche mit 2 verschiedenen Axen oder Rotationsellipsoide. Um ein dreiaxiges Ellipsoid zu erhalten, müssen wir voraussetzen, dass keiner der 2 Cosinus β' und γ' verschwinde, d. h. dass nicht noch eine zweite Ellipsoidaxe in die Projectionsebene falle.

Sind dann erstlich die 3 Axen des Ellipsoids gegeben, so ist seine Lage gegen die Projectionsebene bestimmt durch

$$(7)\qquad \begin{aligned} \beta' &= \pm \frac{b}{a}\sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}}, \\ \gamma' &= \pm \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}. \end{aligned}$$

Hierbei sind alle Combinationen der Vorzeichen erlaubt, da I^b dadurch nicht alterirt wird. Damit sowohl β' als γ' einen reellen Werth habe, ist es nöthig, dass entweder $c > a > b$ oder $b > a > c$ sei; die Grösse der 3 Axen ist mithin so zu wählen, dass die von a zwischen der von b und c liegt, während ihre Wahl im Uebrigen beliebig ist. Wir dürfen unbeschadet der Allgemeinheit unserer Untersuchung für das Folgende die Voraussetzung machen: $c > a > b$. Ist zweitens β' und folglich γ', also die Lage des Ellipsoids gegeben, so bleiben noch 2 Axen ganz oder zum Theil willkürlich, während die dritte resp. bestimmt ist durch

$$(8)\qquad \begin{aligned} a^2 &= \frac{b^2c^2}{c^2\beta'^2 + b^2\gamma'^2}, \\ b^2 &= \frac{a^2c^2\beta'^2}{c^2 - \gamma'^2a^2}, \\ c^2 &= \frac{a^2b^2\gamma'^2}{b^2 - \beta'^2a^2}. \end{aligned}$$

Ich darf hier b und c vollständig beliebig annehmen, um stets einen reellen Werth für a zu erhalten, dagegen müssen c und a oder b und a so gewählt werden, dass bezüglich $c^2 > \gamma'^2a^2$ oder $b^2 > \beta'^2a^2$ ist, um noch mögliche Werthe für b und c zu bekommen.

Die einzelnen Coëfficienten in (1^a) nehmen gemäss ihrer Bedeutung jetzt folgende Gestalt an:

$$E = F = 0,$$

$$A = \frac{1}{a^2},$$

$$B = \frac{1}{a^2},$$

$$C = \frac{\beta''^2}{b^2} + \frac{\gamma''^2}{c^2}$$
$$= \frac{1}{c^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\beta''^2$$
$$= \frac{1}{c^2} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)\frac{\beta''^2}{\beta'^2},$$

oder nach Vertauschung von β''^2 mit γ'^2 und Benutzung der Gleichungen (7)

$$C = \frac{c^4(a^2-b^2) + b^4(c^2-a^2)}{a^2b^2c^2(c^2-b^2)};$$

endlich

$$D = \frac{\beta'\beta''}{b^2} + \frac{\gamma'\gamma''}{c^2}$$
$$= \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\beta'\beta''$$
$$= \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)\frac{\beta''}{\beta'}.$$

In diesen Formeln für D liegt ein doppeltes Vorzeichen. Da $c > a > b$ vorausgesetzt ist, so ist D positiv, wenn das Product $\beta'\beta''$ positiv ist oder β' und β'' dieselben Vorzeichen haben, d. h. wenn die b-Axe durch den ersten und dritten Quadranten geht, D ist negativ, wenn $\beta'\beta''$ negativ, also β' und β'' mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen sind, folglich b dem zweiten und vierten Quadranten angehört. Drückt man nun β'' durch γ' aus und benutzt die Gleichungen (7), so erhält man für alle nach Seite 13 möglichen Combinationen der Cosinus weiterhin

$$D = \pm \frac{\sqrt{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}}{a^2bc}.$$

Beide Vorzeichen sind für das Bestehen des Ellipsoids zulässig und gemäss den obigen Bestimmungen zu wählen.

Hiernach bekommt die Gleichung desselben folgende verschiedene Formen:

$$(9^a) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \left(\frac{\beta''^2}{b^2} + \frac{\gamma''^2}{c^2}\right)z^2 + 2\left(\frac{\beta'\beta''}{b^2} + \frac{\gamma'\gamma''}{c^2}\right)yz = 1$$

oder

$$(9^b)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\beta''^2z^2+2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\beta'\beta''yz=1$$

oder

$$(9^c)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{\beta''}{\beta'}\right)^2z^2+2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{\beta''}{\beta'}yz=1$$

oder endlich

$$(9^d)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{c^4(a^2-b^2)+b^4(c^2-a^2)}{a^2b^2c^2(c^2-b^2)}z^2\pm\frac{\sqrt{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}}{a^2bc}yz=1.$$

In diesen sind 2 den Anforderungen genügende Ellipsoide enthalten, die an Gestalt vollständig gleich sind. Sie erscheinen länglich in der Richtung der c-Axe, aber zusammengedrückt in der Richtung der b-Axe und stehen, gleichsam gedrehet um die gemeinsame a-Axe, in Form eines Kreuzes, dessen flachere Seiten gleiche Neigung gegen die Projectionsebene zeigen. Setzt man in einer der Gleichungen, etwa in (9^d), nacheinander

$$y=z=0,\quad x=z=0,\quad x=y=0,$$

so finden sich für die Durchschnitte der Coordinatenaxen mit der Fläche die dritten reellen Coordinaten:

$$x=\pm a,\quad y=\pm a,\quad z=\frac{abc\sqrt{c^2-b^2}}{\sqrt{c^4(a^2-b^2)+b^4(c^2-a^2)}}.$$

Wir haben bis jetzt nur die erste und zweite der Bedingungsgleichungen auf Seite 10 untersucht, die 3 folgenden aber unberücksichtigt gelassen; wir gehen nunmehr dazu über, aus letzteren den Ort des Auges zu bestimmen. Zunächst folgt aus Gleichung IV, da $E=0$ ist,

$$(10)\qquad l=0,$$

ferner aus Gleichung III

$$m=-\frac{D}{A}n,$$

endlich aus Gleichung V nach Einsetzung des vorstehenden Werthes von m

$$(11)\qquad n=\pm\sqrt{\frac{A}{CA-D^2}},$$

und hieraus ergibt sich wieder für m:

$$m = \pm \frac{D}{A} \sqrt{\frac{A}{CA - D^2}}, \tag{12}$$

wobei die obern und untern Vorzeichen auf einander zu beziehen sind.

Bestimmt man aus der Gleichung

$$F(x,y,z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz - 1 = 0$$

die Punkte eines Maximums und Minimums dieser Fläche in Bezug auf die xy-Ebene, indem man

$$\frac{dF(x,y,z)}{dx} = o \text{ und } \frac{dF(x,y,z)}{dy} = o \text{ setzt}$$

und daraus, sowie aus $F(x,y,z) = o$ x, y und z berechnet, so erhält man, da

$$\frac{dF(x,y,z)}{dx} = 2Ax, \quad \frac{dF(x,y,z)}{dy} = 2Ay + 2Dz$$

ist,

$$x = o, \qquad y = -\frac{D}{A} z,$$

und durch Einsetzung dieser Werthe in die Flächengleichung

$$z = \pm \sqrt{\frac{A}{CA - D^2}},$$

und jetzt

$$y = \mp \frac{D}{A} \sqrt{\frac{A}{CA - D^2}}.$$

Aus der Uebereinstimmung dieser Coordinaten mit denen des Auges ist ersichtlich, dass letzteres im Maximum oder Minimum des Ellipsoids in Bezug auf die Projectionsebene liegt.

Zur weitern Berechnung von n und m findet sich aus dem Frühern

$$n^2 = \frac{A}{CA - D^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{c^4(a^2-b^2) + b^4(c^2-a^2)}{a^2b^2c^2(b^2-c^2)} \cdot \frac{1}{a^2} - \frac{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}{a^4b^2c^2}}$$

$$= \frac{b^2c^2}{a^2},$$

mithin

$$(11^a) \qquad n = \pm \frac{bc}{a},$$

und

$$m = -\frac{D}{A} n$$

$$= \mp \frac{\sqrt{(c^2-a^2)(a^2-b^2)} \cdot a^2}{a^2 bc} \cdot \frac{bc}{a}$$

$$(12^a) \qquad = \mp \frac{\sqrt{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}}{a}.$$

Das Vorzeichen von n ist beliebig, d. h. das Auge kann sowohl auf der einen als auf der andern Seite der Projectionsebene liegen. Dann ist aber das Zeichen des entsprechenden m bestimmt, und zwar hat man für m dasselbe, wie für n zu wählen, wenn D oder $\beta'\beta''$ negativ, aber das entgegengesetzte, wenn D oder $\beta'\beta''$ positiv ist. Im ersten Falle befindet sich das Auge innerhalb des ersten oder dritten, im zweiten innerhalb des zweiten oder vierten Quadranten, also jedesmal in demjenigen, durch den auch die grösste Axe c geht.

Man gelangt noch zu einem andern Resultate, wenn man die gefundenen Coordinaten des Auges transformirt in solche, die sich auf ein mit den Axen des Ellipsoids zusammenfallendes Coordinatensystem beziehen. Sind letztere l', m', n', so finden die Relationen statt:

$$l = l',$$
$$m = m'\beta' + n'\gamma',$$
$$n = m'\beta'' + n'\gamma'',$$

und folglich ist

$$(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')m' = m\gamma''-n\gamma',$$
$$(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')n' = -(m\beta''-n\beta').$$

Ich betrachte vorstehende Ausdrücke für jeden der 8 auf Seite 13 unterschiedenen Fälle einzeln und setze in dieselben $\frac{bc}{a}$ und $\frac{\sqrt{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}}{a}$ statt n und m entweder mit ent-

gegengesetzten oder mit denselben Zeichen ein, jenachdem die von β' und β'' gleich oder ungleich sind, substituire ferner rechts die Werthe von β', β'', γ', γ'' aus den Gleichungen (7) mit den jedesmal zusammengehörigen Vorzeichen und vertausche die Klammer links mit $+1$ oder -1, jenachdem $\beta'\gamma''$ positiv oder negativ ist. In jedem der genannten Fälle ergibt sich

$$(13) \qquad m' = \pm \frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{c^2-b^2}},$$

$$n' = \pm \frac{c\sqrt{c^2-a^2}}{\sqrt{c^2-b^2}},$$

wobei Zeichengleichheit stattfindet, wenn solches bei β'' und γ' der Fall ist, und umgekehrt. Die Coordinaten

$$0, \qquad \pm \frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{c^2-b^2}}, \qquad \pm \frac{c\sqrt{c^2-a^2}}{\sqrt{c^2-b^2}}$$

sind aber bekanntlich diejenigen der Kreispunkte eines auf seine Axen bezogenen Ellipsoids, wenn letztere in dem Verhältnisse stehen: $c > a > b$. Das Auge ist also in 2 von den Kreispunkten des Ellipsoids gelegen, welche zugleich ein Maximum oder Minimum desselben in Bezug auf die Projectionsebene bilden.

Um uns von der Richtigkeit der ganzen Rechnung zu überzeugen, suchen wir noch die Gleichung der Projectionsfigur. Die auf Seite 6 gefundenen Ausdrücke für x, y, z gehen über in

$$x = \frac{(m\mu + n\nu - d)\xi}{m\mu + n\nu - \lambda\xi - \mu\eta},$$

$$y = \frac{md - m\lambda\xi + (n\nu - d)\eta}{m\mu + n\nu - \lambda\xi - \mu\eta},$$

$$z = \frac{nd - n\lambda\xi - n\mu\eta}{m\mu + n\nu - \lambda\xi - \mu\eta}.$$

Durch Einsetzung derselben in die Gleichung des Ellipsoids auf Seite 17 erhält man die gesuchte Projection, welche nach Multiplication mit $(m\mu + n\nu - \lambda\xi - \mu\eta)^2$ lautet:

$$A(m\mu + n\nu - d)^2\xi^2 +$$
$$A\{md - m\lambda\xi + (n\nu - d)\eta\}^2 +$$
$$C\{nd - n\lambda\xi - n\mu\eta\}^2 +$$
$$2D\{md - m\lambda\xi + (n\nu - d)\eta\}\{nd - n\lambda\xi - n\mu\eta\}$$
$$-\{m\mu + n\nu - \lambda\xi - \mu\eta\}^2 = 0.$$

Wenn man diese nach ξ und η ordnet, so vereinfachen sich die Coëfficienten durch Anwendung der Gleichungen auf Seite 16 folgendermassen:

der Coëfficient von ξ^2:

$$A(m\mu + n\nu - d)^2 + Am^2\lambda^2 + Cn^2\lambda^2 + 2Dmn\lambda^2 - \lambda^2 =$$
$$A(m\mu + n\nu - d)^2 + A\frac{D^2}{A^2}n^2\lambda^2 + Cn^2\lambda^2 - 2\frac{D^2}{A}n^2\lambda^2 - \lambda^2 =$$
$$A(m\mu + n\nu - d)^2 + \frac{CA - D^2}{A}n^2\lambda^2 - \lambda^2 =$$
$$\frac{(m\mu + n\nu - d)^2}{a^2};$$

der Coëfficient von η^2:

$$A(n\nu - d)^2 + Cn^2\mu^2 - 2D(n\nu - d)n\mu - \mu^2 =$$
$$A(n\nu - d)^2 + Am^2\mu^2 + 2A(n\nu - d)m\mu =$$
$$\frac{(m\mu + n\nu - d)^2}{a^2};$$

der Coëfficient von $\xi\eta$:

$$-2Am(n\nu - d)\lambda + 2Cn^2\lambda\mu + 2D\{mn\lambda\mu - (n\nu - d)n\lambda\} - 2\lambda\mu$$
$$= 2Dn\lambda(n\nu - d) - 2Dn\lambda(n\nu - d) + 2\left(C - \frac{D^2}{A}\right)n^2\lambda\mu - 2\lambda\mu$$
$$= 0;$$

der Coëfficient von ξ:

$$-2Am^2\lambda d - 2Cn^2\lambda d - 4Dmn\lambda d + 2(m\mu + n\nu)\lambda =$$
$$2\left(\frac{D^2}{A} - C\right)n^2\lambda d + 2(m\mu + n\nu)\lambda =$$
$$2(m\mu + n\nu - d)\lambda;$$

der Coëfficient von η:

$$2Amd(n\nu - d) - 2Cn^2\mu d + 2D\{(n\nu - d)nd - mn\mu d\}$$
$$+ 2(m\mu + n\nu)\mu =$$
$$2\left(\frac{D^2}{A} - C\right)n^2\mu d + 2(m\mu + n\nu)\mu =$$
$$2(m\mu + n\nu - d)\mu;$$

das constante Glied endlich:

$$Am^2d^2 + Cn^2d^2 + 2Dmnd^2 - (m\mu + n\nu)^2 =$$
$$\left(C - \frac{D^2}{A}\right)n^2d^2 - (m\mu + n\nu)^2 =$$
$$- \{(m\mu + n\nu)^2 - d^2\} =$$
$$- \{m\mu + n\nu + d\}\{m\mu + n\nu - d\}.$$

Werden jetzt die gefundenen Coëfficienten eingesetzt und der gemeinsame Factor $(m\mu + n\nu - d)$ fortgehoben, so entsteht als Gleichung der Projection:

$$\frac{m\mu + n\nu - d}{a^2}\xi^2 + \frac{m\mu + n\nu - d}{a^2}\eta^2 + 2\lambda\xi + 2\mu\eta - (m\mu + n\nu + d) = 0, \tag{14}$$

welche, wie zu erwarten stand, einen Kreis darstellt. Wollte man dieselbe durch die Coëfficienten der Gleichungen des Ellipsoids und der schneidenden Ebene darstellen, so würde man in sie noch die früher berechneten Werthe von m und n mit den richtigen Vorzeichen einzusetzen haben.

Lassen wir die auf Seite 13 gemachte Voraussetzung, dass keiner der Cosinus β' und γ' verschwinde, jetzt fallen und nehmen an, dass etwa $\gamma' = o$ sei, so folgt aus der Gesammtheit der Annahmen:

$$\alpha' = \alpha'' = \beta = \beta'' = \gamma = \gamma' = o,$$
$$\alpha^2 = \beta'^2 = \gamma''^2 = 1.$$

Die Axen des Ellipsoids fallen nunmehr mit denen des Coordinatensystems zusammen, also liegen 2 von ihnen in der Projectionsebene, während die dritte, nämlich c, auf derselben senkrecht steht. Die Bedingungsgleichung (I^b) geht über in

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2},$$

welche fordert, dass

$$a = b$$

sei, dagegen sind für c keine weitern Beschränkungen mehr vorhanden. Das gesuchte Ellipsoid ist hier somit ein beliebiges Rotationsellipsoid

(15) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Da D = o ist, so heissen die Coordinaten des Auges

(16) $$l=o, \qquad m=o,$$
$$n=\pm\sqrt{\frac{C-A}{A}}=\pm c;$$

dasselbe befindet sich also an den beiden Enden der ungleichen Ellipsoidaxe. Die Gleichung der in der Projectionsebene entstehenden Figur hat im vorliegenden Falle die Gestalt

(17) $$\frac{n\nu-d}{a^2}\xi^2+\frac{n\nu-d}{a^2}\eta^2+2\lambda\xi+2\mu\eta-(n\nu+d)=o.$$

Indem nun gemäss einer Bemerkung auf Seite 5 die Resultate, welche wir für die specielle Projectionsebene xy gefunden haben, auch ihre Geltung behalten müssen für jede mit dieser parallele Projectionsebene, so können wir unsere erste Untersuchung mit dem Satze schliessen:

»Läuft bei einem dreiaxigen Ellipsoid eine Axe, etwa a, mit einer festen Projectionsebene parallel, bezeichnen β' und γ' die Cosinus der Winkel, welche die andern beiden Axen b und c mit derselben bilden und findet unter diesen Grössen die Beschränkung statt:

$$\frac{1}{a^2}=\frac{\beta'^2}{b^2}+\frac{\gamma'^2}{c^2};$$

ist ferner das Auge in einem der von der Projectionsebene am weitesten oder am wenigsten weit entfernten Punkte (einem Kreispunkte) dieses Ellipsoids (in der bc-Ebene) gelegen, so hat dasselbe die Eigenschaft, dass alle stereographischen Projectionen ebener Schnitte in Bezug auf jene Projectionsebene Kreise sind. Bezieht man seine Gleichung auf ein Coordinatensystem, dessen Anfang in seinem Mittelpunkte liegt, dessen xy-Ebene der gegebenen Projectionsebene parallel ist, und dessen x-Axe mit a zusammenfällt, so ist seine Gleichung eine derjenigen, welche auf Seite 15 und 16 angegeben sind. Dieselbe Eigenthümlich-

keit theilt mit dem vorigen auch jedes Rotationsellipsoid, dessen ungleiche Axe auf der Projectionsebene senkrecht steht, sobald das Auge in einem der Endpunkte dieser Axe sich befindet. Andere Ellipsoide mit gleicher Eigenschaft existiren nicht.«

Zweiter Theil.

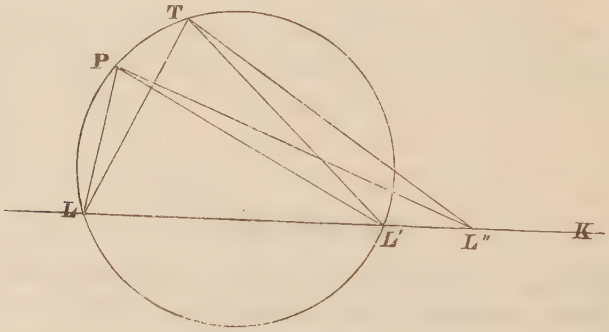
Untersuchung, ob es Ellipsoide gibt von der Beschaffenheit, dass je 2 ebene Schnitte auf ihnen dieselben Winkel bilden, wie deren stereographische Projectionen in der Projectionsebene.

Eine an einen beliebigen Punkt T des Ellipsoids gelegte Tangentialebene schneide die gegebene Projectionsebene in einer Kante K. Zwei andere durch das Auge und den Punkt T gehende, übrigens beliebige Ebenen bestimmen auf der Tangentialebene 2 Linien, welche Tangenten des Ellipsoids in T, und in der Projectionsebene ebenfalls 2 solche, welche die stereographischen Projectionen dieser Tangenten sind. Letztere schneiden sich in T, erstere in einem Punkte P, in welchem die durch das Auge und durch T gezogene Gerade die Projectionsebene trifft; ausserdem hat je eine Tangente mit ihrer Projection einen Punkt L resp. L′ in der Kante K gemeinsam. Damit das Ellipsoid die nunmehr zu untersuchende Eigenschaft besitze, würde

$$\sphericalangle \mathrm{LTL'} = \sphericalangle \mathrm{LPL'}$$

sein müssen, welche Richtung ich auch den zuletzt eingeführten Ebenen geben, und wo ich immer auf seiner Oberfläche den Punkt T wählen mag. Ich denke mir jetzt die Tangentialebene so um die Kante K gedreht, dass sie mit

der Projectionsebene zusammenfällt, und zwar in der Weise, dass die Punkte T und P an dieselbe Seite von K zu liegen kommen. Dann ist nothwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichheit der vorgenannten Winkel, dass T, P, L und L′ auf der Peripherie eines Kreises liegen.



Das sei angenommen. Denke ich mir nun aber die Ebene, welche auf K den Punkt L′ ausschnitt, in etwas anderer Richtung durchgelegt, so dass sie jetzt auf K den Punkt L″ trifft, so müssten, damit die Winkel LTL″ und LPL″ gleich seien, auch T, P, L, L″ auf einem Kreise sich befinden. Das kann mit der vorigen Annahme nur dann bestehen, wenn die Punkte T und P zusammenfallen. Alsdann aber ist TL = PL, TL′ = PL′ u. s. w., wo man immer den Punkt L auf K wählen mag, und umgekehrt, wenn 2 Paare solcher Linien gleich sind, so fallen T und P zusammen und die von ihnen gebildeten Winkel sind congruent. Damit also die erwähnte zweite Eigenschaft für das Ellipsoid gelte, ist nothwendige und hinreichende Bedingung, dass der zwischen dem Berührungspunkte und dem Durchschnittspunkte mit der Projectionsebene liegende Theil einer beliebigen Tangente gleich seiner Projection sei. Diese Bedingung werden wir zur Auflösung unserer Aufgabe benutzen, und wir gehen dazu über, die Grösse der gleichzusetzenden Strecken zu berechnen.

Die Gleichung des Ellipsoids, die Coordinaten des Auges und die Projectionsebene bleiben dieselben, wie im ersten Theile. Hat der Punkt T die Coordinaten x, y, z, so werden die Gleichungen der Geraden, welche durch diesen und das Auge geht, wenn ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten sind, lauten:

$$\frac{\xi-l}{x-l} = \frac{\eta-m}{y-m} = \frac{\zeta-n}{z-n}.$$

Setzt man in denselben $\zeta = o$, so findet man als Coordinaten des Durchschnitts dieser Linie mit der Projectionsebene (also des Punktes P):

$$\xi = \frac{nx-lz}{n-z},$$
$$\eta = \frac{ny-mz}{n-z}. \tag{18}$$

Eine beliebige andere Gerade, welche durch den Punkt (x, y, z) gelegt ist, mag die Gleichungen haben:

$$\eta - y = Q(\xi - x),$$
$$\zeta - z = R(\xi - x),$$

oder

$$\eta = Q\xi + y - Qx,$$
$$\zeta = R\xi + z - Rz.$$

Soll dieselbe zugleich Tangente im Punkte (x, y, z) sein, so muss unter den Grössen Q und R der Zusammenhang stattfinden:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}Q + \frac{dF}{dz}R = o, \tag{19}$$

wo mit F die Gleichung des Ellipsoids bezeichnet ist, d. h. es muss

$$\begin{aligned} &Ax + Ez + Fy + \\ &(By + Dz + Fx)Q + \\ &(Cz + Dy + Ex)R = o \end{aligned} \tag{19a}$$

sein, wofür ich kürzer schreibe:

$$L + MQ + NR = o. \tag{19b}$$

Der Durchschnitt dieser Tangente mit der Projectionsebene (also der Punkt L) hat die Coordinaten:

$$\xi' = \frac{Rx - z}{R}, \qquad \eta' = \frac{Ry - Qz}{Q}. \tag{20}$$

Aus den sich nun ergebenden bekannten Beziehungen

$$(TK)^2 = (x - \xi')^2 + (y - \eta')^2 + z^2$$

und

$$(PK)^2 = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2$$

erhalten wir gemäss den im Anfange gemachten Erörterungen die einzige Bedingungsgleichung:

$$(x - \xi')^2 + (y - \eta')^2 + z^2 = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 \tag{21}$$

oder

$$\left(x - \frac{Rx - z}{R}\right)^2 + \left(y - \frac{Ry - Qz}{R}\right)^2 + z^2 = \left(\xi - \frac{Rx - z}{R}\right)^2 + \left(\eta - \frac{Ry - Qz}{R}\right)^2 \tag{21a}$$

oder

$$\{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 - z^2\}R + 2(\eta - y)zQ + 2(\xi - x)z = 0. \tag{21b}$$

Eliminirt man aus derselben Q durch Einsetzung von

$$Q = -\frac{L + NR}{M}$$

(cf. (19b)), so geht sie über in

$$\{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 - z^2]M - 2(\eta - y)zN\}R + 2M(\xi - x)z - 2L(\eta - y)z = 0. \tag{22}$$

Die Grösse R ist vollständig willkurlich und deutet an, dass die Tangente am Punkte (x, y, z) jede beliebige Richtung haben darf. Dadurch aber spaltet sich die Gleichung (22) in die folgenden zwei:

$$\text{VI} \qquad \{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 - z^2\}M = 2(\eta - y)zN$$

und

$$\text{VII} \qquad 2M(\xi - x)z = 2L(\eta - y)z.$$

Aus letzterer ergibt sich

$$\frac{M}{L} = \frac{\eta - y}{\xi - x},$$

oder wenn wir aus (18) für ξ und η ihre Werthe substituiren,

$$\frac{M}{L} = \frac{y - m}{x - l},$$

mithin

$$Mx - Ly = Ml - Lm.$$

Da x und y willkürlich sind, während m und l constante Grössen bedeuten, so vermuthet man leicht, dass beide Seiten der letzten Gleichung für sich gleich o sind. Es beweist sich dasselbe aber auch aus Folgendem: Setzt man in sie $-x$, $-y$, $-z$ ein, so wird M zu $-M$ und L zu $-L$ und sie erscheint unter der Gestalt

$$Mx - Ly = -(Ml - Lm).$$

Diese und die vorige Gleichung können nur mit einander bestehen, wenn

$$\begin{aligned} Mx &= Ly, \\ Ml &= Lm \end{aligned} \tag{23}$$

ist. Wäre l und m von o verschieden, so würde:

$$\frac{M}{L} = \frac{y}{x} = \frac{m}{l}$$

folgen, was unmöglich ist, da $\frac{y}{x}$ ganz beliebige Werthe annehmen kann, während $\frac{m}{l}$ constant sein würde. Wir sind mithin zu der Annahme gezwungen, dass

$$l = m = o \tag{24}$$

ist. Durch Anwendung des Gefundenen erhält die Bedingung VI die einfachere Form:

$$L(x^2 + y^2) = L(n - z)^2 + 2N(n - z)x. \tag{VI^a}$$

Da dieselde auch wieder für den Punkt $(-x, -y, -z)$ gelten muss, für diesen aber ihre linke Seite den entgegengesetzten Werth annimmt, so muss bei der rechten dasselbe stattfinden, d. h. es muss

$$-\{L(n-z)^2 + 2N(n-z)x\} = -L(n+z)^2 + 2N(n+z)x$$

sein oder

$$Lnz = Nnx. \tag{25}$$

n kann nicht verschwinden, denn sonst würde, weil nach (24) und (18) auch ξ und η gleich o wären, die Bedingungsgleichung VI z. B. für $x = z = o$.

$$My^2 = o$$

erfordern, in einem Falle, wo weder M noch y verschwinden können. Mithin dürfen wir in (25) n fortheben und behalten:

$$Lz = Nx. \tag{25a}$$

Wird jetzt in VI[a] Nx durch Lz ersetzt, so folgt:

$$L(x^2 + y^2) + Lz^2 = Ln^2$$

oder

$$x^2 + y^2 + z^2 = n^2, \tag{26}$$

eine Gleichung, welche eine Kugelfläche anzeigt. In der That gelangen wir auch schon durch die Bedingungen (25[a]) und (23) zu einer Kugel, da die Gleichungen der Normalen

$$\eta = \frac{M}{L}\xi + \frac{Ly - Mx}{L},$$

$$\zeta = \frac{N}{L}\xi + \frac{Lz - Nx}{L}$$

durch ihre Anwendung die Form der Kugelnormalen

$$\eta = \frac{M}{L}\xi$$

$$\zeta = \frac{N}{L}\xi$$

erhalten. Es darf deshalb die Behauptung ausgesprochen werden:

»Es ist unmöglich, dass irgend ein Ellipsoid die Eigenschaft habe, dass jede 2 ebene Schnitte auf demselben Winkel bilden, die ihren stereographischen Projectionen gleich sind.«

Für die Kugel aber sind alle Bedingungen erfüllt und für den Ort des Auges finden wir die Coordinaten:

$$l = o, \quad m = o, \quad n = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \pm\varrho, \tag{28}$$

wo ϱ den Radius derselben bedeutet, d. h. das Auge befindet sich in den Endpunkten des Durchmessers, der auf der Projectionsebene senkrecht steht.

Da dieser Theil unserer Untersuchung uns zu einem negativen Resultate geführt hat, so werde noch der Zusammenhang aufgesucht, welcher zwischen dem Cosinus eines Winkels auf dem Ellipsoid und dem seiner stereographischen Projection in Wirklichkeit stattfindet. Ist t der von den Tangenten, und p der von den Projectionen gebildete Winkel, so ist bekanntlich (cf. Fig. auf Seite 24)

$$(LL')^2 = (LT)^2 + (L'T)^2 - 2(LT)(L'T)\cos t;$$

es ist aber auch

$$(LL')^2 = (LP)^2 + (L'P)^2 - 2(LP)(L'P)\cos p.$$

Von Seite 26 entnimmt man

$$(LT)^2 = \left(x - \frac{Rx-z}{R}\right)^2 + \left(y - \frac{Ry-Qz}{R}\right)^2 + z^2$$
$$= \left(\frac{z}{R}\right)^2 + \left(\frac{Qz}{R}\right)^2 + z^2,$$

und entsprechend

$$(L'T)^2 = \left(\frac{z}{R'}\right)^2 + \left(\frac{Q'z}{R'}\right)^2 + z^2;$$

ebenso

$$(LP)^2 = \left\{(\xi - x) + \frac{z}{R}\right\}^2 + \left\{(\eta - y) + \frac{Qz}{R}\right\}^2,$$

$$(L'P)^2 = \left\{(\xi - x) + \frac{z}{R'}\right\}^2 + \left\{(\eta - y) + \frac{Q'z}{R'}\right\}^2.$$

Wir substituiren diese Werthe in die rechten Seiten der Ausdrücke für $(LL')^2$ und erhalten durch Gleichsetzung derselben

$$\left(\frac{z}{R}\right)^2 + \left(\frac{Qz}{R}\right)^2 + z^2 + \left(\frac{z}{R'}\right)^2 + \left(\frac{Q'z}{R'}\right)^2 + z^2$$
$$- 2\sqrt{\left\{\left(\frac{z}{R}\right)^2 + \left(\frac{Qz}{R}\right)^2 + z^2\right\}\left\{\left(\frac{z}{R'}\right)^2 + \left(\frac{Q'z}{R'}\right)^2 + z^2\right\}}\cdot\cos t =$$
(29)
$$\left\{(\xi - x) + \frac{z}{R}\right\}^2 + \left\{(\eta - y) + \frac{Qz}{R}\right\}^2 + \left\{(\xi - x) + \frac{z}{R'}\right\}^2 + \left\{(\eta - y) + \frac{Q'z}{R'}\right\}^2$$

$$-2\sqrt{\left[\left\{(\xi-x)+\frac{z}{R}\right\}^2+\left\{(\eta-y)+\frac{Qz}{R}\right\}^2\right]\left[\left\{(\xi-x)+\frac{z}{R'}\right\}^2+\left\{(\eta-y)+\frac{Q'z}{R'}\right\}^2\right]}\cdot\cos p$$

oder

$$z^2-\sqrt{\left\{\left(\frac{z}{R}\right)^2+\left(\frac{Qz}{R}\right)^2+z^2\right\}\left\{\left(\frac{z}{R'}\right)^2+\left(\frac{Q'z}{R'}\right)^2+z^2\right\}}\cos t =$$

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\xi-x)\left\{\frac{z}{R}+\frac{z}{R'}\right\}+(\eta-y)\left\{\frac{Qz}{R}+\frac{Q'z}{R'}\right\} \tag{29a}$$

$$-\sqrt{\left[\left\{\xi-x+\frac{z}{R}\right\}^2+\left\{\eta-y+\frac{Qz}{R}\right\}^2\right]\left[\left\{\xi-x+\frac{z}{R'}\right\}^2+\left\{\eta-y+\frac{Q'z}{R'}\right\}^2\right]}\cos p$$

Nach Seite 25 ist

$$\xi-x=\frac{nx-lz}{n-z}-x=\frac{x-l}{n-z}z,$$

$$\eta-y=\frac{ny-mz}{n-z}-y=\frac{y-m}{n-z}z.$$

Wird dies eingesetzt, so findet man, da sich z^2 überall forthebt

$$1-\sqrt{\frac{1+Q^2+R^2}{R^2}\times\frac{1+Q'^2+R'^2}{R'^2}}\cdot\cos t =$$

$$\left(\frac{x-l}{n-z}\right)^2+\left(\frac{y-m}{n-z}\right)^2+\frac{x-l}{n-z}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)+\frac{y-m}{n-z}\left(\frac{Q}{R}+\frac{Q'}{R'}\right) \tag{29b}$$

$$-\sqrt{\left\{\left(\frac{x-l}{n-z}+\frac{1}{R}\right)^2+\left(\frac{y-m}{n-z}+\frac{Q}{R}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{x-l}{n-z}+\frac{1}{R'}\right)^2+\left(\frac{y-m}{n-z}+\frac{Q'}{R'}\right)^2\right\}}\cos p.$$

Die beiden Tangenten mögen mit den Coordinatenaxen Winkel bilden, deren Cosinus bezüglich λ, μ, ν und λ', μ', ν' seien; dann bedeuten die Grössen Q und R resp. Q′ und R′ nichts Anderes als

$$Q=\frac{\mu}{\lambda},\qquad R=\frac{\nu}{\lambda},$$

$$Q'=\frac{\mu'}{\lambda'},\qquad R'=\frac{\nu'}{\lambda'},$$

und daraus folgt

$$\frac{1+Q^2+R^2}{R^2}=\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{\nu^2}=\frac{1}{\nu^2},$$

$$\frac{1+Q'^2+R'^2}{R'^2}=\frac{\lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2}{\nu'^2}=\frac{1}{\nu'^2}.$$

$$1-\frac{\cos t}{\sqrt{\nu^2.\nu'^2}}=$$

$$\frac{(x-l)^2+(y-m)^2}{(n-z)^2}+\frac{x-l}{n-z}\left(\frac{\lambda}{\nu}+\frac{\lambda'}{\nu'}\right)+\frac{y-m}{n-z}\left(\frac{\mu}{\nu}+\frac{\mu'}{\nu'}\right)$$

$$(29^c)\quad -\sqrt{\left\{\left(\frac{x-l}{n-z}+\frac{\lambda}{\nu}\right)^2+\left(\frac{y-m}{n-z}+\frac{\mu}{\nu}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{x-l}{n-z}+\frac{\lambda'}{\nu'}\right)^2+\left(\frac{y-m}{n-z}+\frac{\mu'}{\nu'}\right)^2\right\}}\cos p.$$

Cos t und cos p vorstehender Relation ergeben sich in der That für eine Kugel als gleich, sobald $l=m=o$ und $n=\varrho$ gesetzt wird. Nach Gleichung (19^b) ist nämlich, wenn wir bedenken, dass hier

$$L=\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\quad M=\frac{\partial F}{\partial y}=2y,\quad N=\frac{\partial F}{\partial z}=2z$$

wird,

$$\lambda x+\mu y+\nu z=o,$$
$$\lambda' x+\mu' y+\nu' z=o.$$

Der Ausdruck an der rechten Seite der Gleichung (29^c), welcher der Wurzelgrösse vorhergeht, verwandelt sich daher in den folgenden:

$$\frac{x^2+y^2}{(\varrho-z)^2}+\frac{x}{\varrho-z}\left(\frac{\lambda}{\nu}+\frac{\lambda'}{\nu'}\right)+\frac{y}{\varrho-z}\left(\frac{\mu}{\nu}+\frac{\mu'}{\nu'}\right)=$$

$$\frac{\varrho^2-z^2}{(\varrho-z)^2}+\frac{x\lambda+y\mu}{(\varrho-z)\nu}+\frac{x\lambda'+y\mu'}{(\varrho-z)\nu'}=$$

$$\frac{\varrho+z}{\varrho-z}-\frac{\nu z}{(\varrho-z)\nu}-\frac{\nu' z}{(\varrho-z)\nu'}=1.$$

Die Function unter dem Wurzelzeichen ändert sich um in

$$\frac{[\{x\nu+(\varrho-z)\lambda\}^2+\{y\nu+(\varrho-z)\mu\}^2][\{x\nu'+(\varrho-z)\lambda'\}^2+\{y\nu'+(\varrho-z)\mu'\}^2]}{(\varrho-z)^4.\nu^2.\nu'^2.}$$

Der Zähler dieses Ausdrucks ist gleich $(\varrho-z)^4$, denn er ist gleichbedeutend mit

$$[(x^2+y^2)\nu^2+(\varrho-z)^2(\lambda^2+\mu^2)+2\nu(\varrho-z)(\lambda x+\mu y)]\times$$
$$[(x^2+y^2)\nu'^2+(\varrho-z)^2(\lambda'^2+\mu'^2)+2\nu'(\varrho-z)(\lambda' x+\mu' y)]=$$
$$[(\varrho^2-z^2)\nu^2+(\varrho-z)^2(1-\nu^2)-2\nu^2(\varrho-z)z]\times$$
$$[(\varrho^2-z^2)\nu'^2+(\varrho-z)^2(1-\nu'^2)-2\nu'(\varrho-z)z]=$$
$$(\varrho-z)^2(\varrho-z)^2=(\varrho-z)^4.$$

Hiermit ist aber bewiesen, dass

$$1 - \frac{\cos t}{\sqrt{\nu^2 . \nu'^2}} = 1 - \frac{\cos p}{\sqrt{\nu^2 . \nu'^2}},$$

also auch

$$\cos t = \cos p$$

ist.